CONCOURS 1978

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

I

Soit G un groupe fini multiplicatif, dont on note e l'élément neutre et n le cardinal; U_n désigne l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On appelle représentation de G tout couple (Φ, E) où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et Φ une application de G dans l'ensemble L(E) des endomorphismes de E, telle que :

$\Phi_e = \mathrm{id}_E$ et, pour tous x et y appartenant à G, $\Phi_{xy} = \Phi_x \circ \Phi_y$.

1° Soit (Φ, E) une représentation de G.

a. Montrer que, pour tout x appartenant à G, Φ_x est un automorphisme de E. Quel est son inverse?

b. Calculer $(\Phi_x)^n$ et en déduire que toutes les valeurs propres de Φ_x appartiennent à U_n.

c. Inversement, soit ω une racine n-ième de l'unité; pour tout v appartenant à E, on pose :

$$v_\omega = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-k} (\Phi_x)^k (v).$$

Montrer qu'alors $nv = \sum_{\omega \in U_n} v_\omega$ et que chaque v_ω non nul est vecteur propre de Φ_x. Φ_x est-il diagonalisable?

2° Soit E' un sous-espace vectoriel de E; on dit qu'il est stable par Φ lorsque, pour tout x appartenant à G, $\Phi_x(E') \subset E'$. La représentation (Φ, E) est dite irréductible lorsque les seuls sous-espaces stables par Φ sont $\{0\}$ et E.

a. Soit (Φ, E) une représentation de G et soit E' un sous-espace de E, stable par Φ. Montrer que, si l'on note Φ'_x la restriction de Φ_x à E', alors (Φ', E') est une représentation de G. Soit E_1 un supplémentaire quelconque de E' dans E; on note p_1 la projection sur E' parallèlement à E_1 et on pose :

$$p = \frac{1}{n} \cdot \sum_{y \in G} \Phi_y \circ p_1 \circ \Phi_y^{-1}.$$

Établir que la restriction de p à E' est $\mathrm{id}_{E'}$; on pose $E'' = \mathrm{Ker}\, p$, montrer que E' et E'' sont supplémentaires dans E et que p est la projection sur E' parallèlement à E''.

b. E'' est-il stable par Φ ?

c. Montrer qu'il existe une décomposition de E en somme directe : $E = E'_1 \oplus \ldots \oplus E'_s$ telle que chaque E'_k soit stable par Φ et que la restriction Φ_k définie par $\Phi_{k,x}$ = restriction de Φ_x à E'_k soit une représentation irréductible de G.

3° Soient (Φ, E) et (Ψ, F) deux représentations de G; on dit qu'elles sont isomorphes lorsqu'il existe une application linéaire bijective f de E sur F telle que, pour tout x appartenant à G : $\Psi_x \circ f = f \circ \Phi_x$.

a. On suppose que (Φ, E) et (Ψ, F) sont deux représentations irréductibles. Soit g une application linéaire de E dans F telle que, pour tout x appartenant à G : $\Psi_x \circ g = g \circ \Phi_x$. Montrer que g est, soit un isomorphisme, soit identiquement nulle (on pourra étudier $\mathrm{Im}\, g$ et $\mathrm{Ker}\, g$).

b. On suppose de plus que $E = F$ et $\Psi = \Phi$; montrer que g est une homothétie, c'est-à-dire de la forme $\lambda\, \mathrm{id}_E$, pour un λ appartenant à $\mathbb{C}$. .../...

M 122 E.S.I.M. 1978

II

Soit Θ le groupe des isométries du plan vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^2$. On note : $\Delta = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi|+|\eta| = 1\}$ et $G_0 = \{u \in \Theta \mid u(\Delta) = \Delta\}$. α désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $\eta = 0$, et β la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1° *a.* Représenter Δ sur une figure, montrer que G_0 est un sous-groupe de Θ et que card(G_0) divise 24 (on pourra associer à tout élément de G_0 une permutation des sommets de Δ). Établir que $\beta\alpha = \alpha\beta^{-1}$.

b. Soit G_1 le sous-groupe de G_0 engendré par α et β; montrer que G_1 est formé des 8 éléments distincts : $e, \alpha, \beta, \alpha\beta, \beta^2, \alpha\beta^2, \beta^3, \alpha\beta^3$.

Comparer G_0 et G_1.

c. G_0 est-il commutatif? Montrer que tout élément de G_0 s'écrit, de manière unique, sous la forme $\alpha^h\beta^k$ avec $h = 0$ si c'est une isométrie directe, $h = 1$ sinon, et $k \in \{0,1,2,3\}$. G_0 est-il isomorphe au groupe additif $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$?

2° *a.* Soit (Φ, E) une représentation de G_0, avec $\dim E = 1$; montrer que Φ est entièrement définie par Φ_α et Φ_β, et que ceux-ci sont de la forme : $\Phi_\alpha = \varepsilon\,\mathrm{id}_E$, $\Phi_\beta = \varepsilon'\,\mathrm{id}_E$, pour ε et $\varepsilon' \in \{-1, 1\}$. Ces représentations sont-elles irréductibles? Peut-on effectivement en obtenir autant que de valeurs du couple $(\varepsilon, \varepsilon')$?

b. Soit (Φ_1, E_1) une autre représentation de G_0, avec $\dim E_1 = 1$, associée au couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_1')$; montrer que (Φ, E) et (Φ_1, E_1) sont isomorphes si, et seulement si, $(\varepsilon, \varepsilon') = (\varepsilon_1, \varepsilon_1')$.

3° Soit ω une racine quatrième de l'unité; si $u \in G_0$ est de la forme $\alpha^h\beta^k$, $h \in \{0,1\}$ et $0 \leqslant k \leqslant 3$, on note $\tilde{\omega}_u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice, dans la base $\big((1,-i),(1,i)\big)$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^h \cdot \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $(\tilde{\omega}, \mathbb{C}^2)$ est une représentation de G_0. Si $\omega = i$, montrer que, pour tout u appartenant à G_0, la restriction de $\tilde{i}_u$ à $\mathbb{R}^2$ est exactement u; la représentation $\tilde{i}$ est-elle irréductible?

b. Établir que l'application $f = \tilde{i}_\alpha$ définit un isomorphisme entre $(\tilde{i}, \mathbb{C}^2)$ et $\big((-\tilde{i}), \mathbb{C}^2\big)$.

c. Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{C}^2$ stables pour $\tilde{1}$, pour $(-\tilde{1})$.

Combien a-t-on, dans cette partie II, trouvé de représentations irréductibles non isomorphes de G_0?

III

On se propose de montrer que toute représentation irréductible de G_0 est isomorphe à l'une de celles définies au II.

1° Soit (Φ, E) une représentation irréductible de G_0; on pose : $A = \Phi_\alpha$, $B = \Phi_\beta$.

a. Montrer qu'un sous-espace E' de E est stable par Φ si, et seulement si, $A(E') \subset E'$ et $B(E') \subset E'$.

b. Soient $E_+ = \{v \in E \mid A(v) = v\}$ et $E_- = \{v \in E \mid A(v) = -v\}$; montrer que E_+ et E_- sont supplémentaires dans E et qu'un sous-espace E' de E est stable par A si, et seulement si, il est de la forme $E'_+ \oplus E'_-$, E'_+ étant un sous-espace de E_+ et E'_- un sous-espace de E_-.

c. Montrer de même qu'il existe deux sous-espaces F_+ et F_- supplémentaires dans E, tels que la restriction de B^2 à F_+ (resp. F_-) soit id_{F_+} $\big(\text{resp. } -\mathrm{id}_{F_-}\big)$.

2° *a.* On suppose que F_+ est différent de $\{0\}$; montrer que $B^2AB^2 = A$ et en déduire que F_+ est stable pour A; l'est-il pour B? Montrer qu'alors $B^2 = \mathrm{id}_E$ et aboutir à une contradiction. Combien B^2 vaut-il en définitive?

b. Soit D une droite vectorielle incluse dans E_+; montrer que la somme des deux sous-espaces D et B(D) est invariante par Φ. Que conclure pour $\dim E$?

3° *a.* On suppose désormais que $\dim E = 2$; soit v_1 un vecteur non nul de D, on pose : $v_2 = B(v_1)$, $e_1 = v_1 - iv_2$ et $e_2 = v_1 + iv_2$. Montrer que (e_1, e_2) est une base de E et que l'application de E dans $\mathbb{C}^2$ qui, à tout vecteur de E, associe le couple de ses coordonnées dans cette base, est un isomorphisme de la représentation Φ sur la représentation $\tilde{i}$ de II 3° *a*).

b. Énoncer le résultat final de II et III.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail